Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS PHOTOGRAPHIE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

BTS Photographie

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de la fermeture d’un tiroir et étude d’une fonction exponentielle (12 questions) **Page 3**

2. Développement en série de Fourier d’une fonction paire périodique (10 questions) **Page 8**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsphoto.fr/assets/annales/bts-photographie/E2 - Mathématiques/2023/BTS Photographie - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation de la fermeture d'un tiroir et étude d'une fonction exponentielle

La distance entre le fond d'un meuble et le fond d'un tiroir qui se ferme est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie une équation différentielle avec conditions initiales, puis les limites, les variations, un algorithme de détermination du temps de fermeture et la position moyenne du tiroir.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.**

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Pour que le produit soit nul, l'un de ses facteurs doit être nul. Les deux solutions sont distinctes, ce qui correspond au cas de deux racines réelles distinctes du tableau. Elles seront utilisées pour déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle à la question suivante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions de l'équation caractéristique sont $r = -1$ et $r = -4$.

Question 1. b. **À l'aide du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.**

Le polynôme caractéristique possède deux racines réelles distinctes, -1 et -4. D'après le tableau, les solutions de l'équation différentielle sont donc des combinaisons linéaires des exponentielles associées à ces racines. Les deux constantes sont arbitraires, puisque cette équation différentielle est du second ordre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution générale est $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. **À partir de la distance initiale entre M et O et de la vitesse initiale indiquées, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).**

La fonction $f(t)$ représente la distance OM, en centimètres. À l'instant initial, cette distance est de 20 cm. La vitesse de rapprochement est négative et vaut -10 cm·s^{-1} : elle correspond à la dérivée de la distance par rapport au temps à $t = 0$. On reporte ainsi directement les deux données dans la fonction et sa dérivée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2. b. En utilisant l'expression admise de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

La distance est donnée par $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. On remplace t par 2, sans arrondir les exponentielles, afin de conserver la valeur exacte :

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

Cette expression donne la distance OM en centimètres, deux secondes après le début de la fermeture.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après 2 s, $OM = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2. c. Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si l'affirmation du constructeur, selon laquelle le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, est exacte et justifier.

La fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. Il suffit donc de vérifier la distance à 4 secondes :

$$f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,4274 \text{ cm}.$$

Cette distance est strictement inférieure au seuil de 0,5 cm. Comme la distance décroît, le seuil est franchi avant 4 secondes : l'affirmation du constructeur est exacte.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, car $f(4) \approx 0,4274 < 0,5$ cm : le tiroir est fermé avant 4 s.

Partie B : Étude de fonction

Question 1. a. Sachant que la limite de e^{-u} lorsque u tend vers +∞ vaut 0, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

La fonction étudiée est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent vers $+\infty$. Ainsi, e^{-t} et e^{-4t} tendent toutes deux vers 0. Par somme et multiplication par des constantes, la limite de $f(t)$ est donc nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est 0. Or, lorsqu'une fonction tend vers une valeur finie L, sa courbe admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, cette valeur est nulle : la courbe se rapproche donc de l'axe des abscisses lorsque le temps augmente indéfiniment.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'asymptote horizontale en $+\infty$ a pour équation $y = 0$.

Question 2. a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive séparément les deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. La règle $(e^{at})' = ae^{at}$ donne $(e^{-t})' = -e^{-t}$ et $(e^{-4t})' = -4e^{-4t}$. En tenant compte du signe moins devant le second terme, on obtient :

$$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. Sachant que f'(t) est strictement négative sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La dérivée étant strictement négative sur l'intervalle, f y est strictement décroissante. De plus, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et la limite de $f(t)$ en $+\infty$ vaut 0. Le tableau résume ces valeurs et le sens de variation.

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$	0

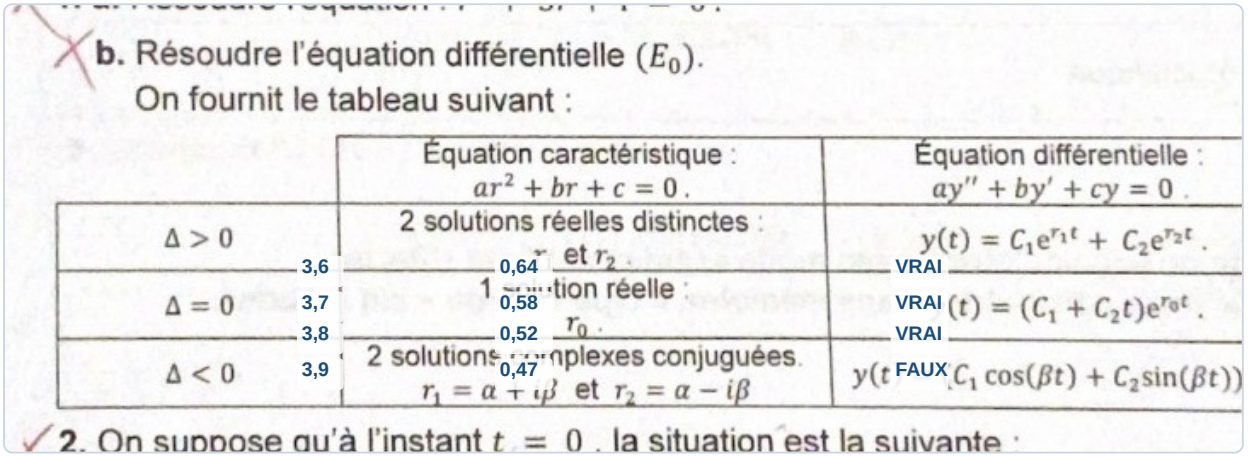
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire jusqu'à son arrêt. Indiquer, pour chaque ligne, t, la valeur de f(t) arrondie au centième et le résultat du test de la condition.

À chaque tour de boucle, t augmente de 0,1. La condition compare la valeur exacte de $f(t)$ à 0,5 ; les valeurs affichées de $f(t)$ sont arrondies au centième. À 3,8, la condition reste vraie. À 3,9, elle devient fausse : l'algorithme s'arrête alors.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition** $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

Tableau de l'algorithme complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Arrêt à la ligne 39, pour $t = 3,9$.

Question 3. b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

La boucle se poursuit tant que $f(t) > 0,5$. Le tableau montre que cette condition est encore vraie pour $t = 3,8$, puis devient fausse pour $t = 3,9$, où $f(t) \approx 0,47$ cm. La valeur conservée dans la variable à la fin de l'exécution correspond donc au premier instant affiché où le tiroir satisfait le critère de fermeture.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À la fin, $t = 3,9$ s : le tiroir est considéré fermé.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t) dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$, car sa dérivée est bien $f(t)$. On applique ensuite la formule de la moyenne sur l'intervalle $[0;4]$:

$$m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big) = \frac{1}{4}\left(\frac{70}{3} - \frac{5}{6} - \frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16}\right).$$

En divisant chaque terme par 4, on obtient l'expression demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$.

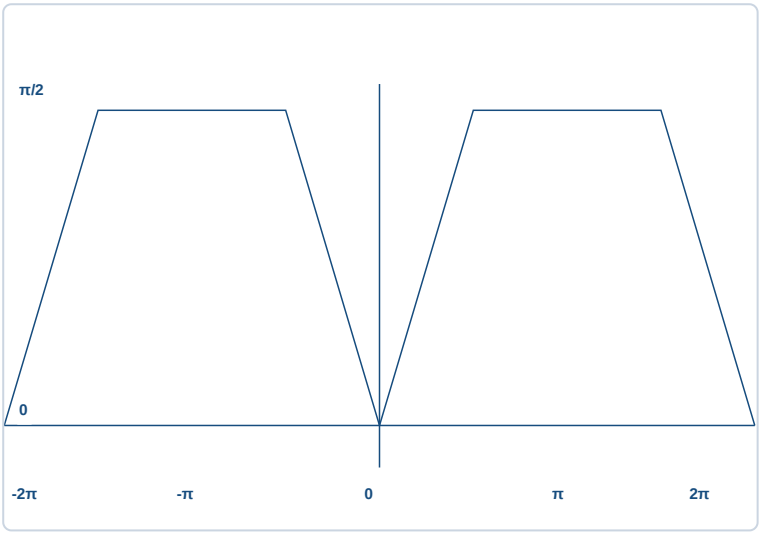
2. Développement en série de Fourier d'une fonction paire périodique

On étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur une demi-période. Les questions portent sur son tracé, ses coefficients de Fourier, une somme partielle et l'approximation de sa valeur efficace à partir des premiers coefficients.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle [−2π ; 2π], à partir de sa période, de sa parité et de sa définition par morceaux.

La fonction est paire et de période 2π. Sur chaque période, elle atteint 0 aux multiples de π, monte jusqu'à $\pi/2$, reste constante sur une longueur π, puis redescend. Le tracé ci-dessous répète ce motif sur $[-2\pi ; 2\pi]$.

Tracé de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé périodique pair : minima nuls en $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$, plateaux de hauteur $\pi/2$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Comme f est paire et $\sin(nt)$ impaire, leur produit est impair. Son intégrale sur l'intervalle symétrique $[-\pi ; \pi]$ est donc nulle. Ainsi, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La pulsation vaut $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Avec la période $T = 2\pi$, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient a_0 vaut $3\pi/8$.

Par la formule du formulaire, $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$. Sur une période, l'aire vaut celle du plateau plus celle du triangle : $\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi^2}{8}$. Donc $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n = ∫₀^(π/2) cos(nt) dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt) dt.

Comme f est paire et $T = 2\pi$, le formulaire donne $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. Sur $[0;\pi/2]$, $f(t) = \pi/2$, et sur $[\pi/2;\pi]$, $f(t) = \pi - t$. En séparant l'intégrale à $\pi/2$, le premier terme devient $\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt$, ce qui donne bien l'égalité demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$, pour $n \geq 1$.

Question 6. En admettant l'expression de a_n donnée dans le sujet, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

En remplaçant n par 1, 2 et 3 dans $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$, on trouve les trois coefficients demandés.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}$, $\quad a_2 = -\frac{1}{\pi}$, $\quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire des coefficients précédents l'expression de la somme partielle $s_3(t)$ demandée dans le sujet.

La somme partielle est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n\cos(nt)$, car tous les coefficients b_n sont nuls. En utilisant les coefficients obtenus, on trouve l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées représente la fonction s_3.**

La somme partielle est paire, avec un maximum près de 0 et des minima près de $\pm\pi$. Cela correspond au tracé présentant des creux marqués en ces points.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe numéro 3.

Question 9. a. **Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

Avec les coefficients exacts, $P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right] = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. L'arrondi à 10^{-4} près est $1,6437$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1,6437$.

Question 9. b. **Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P est une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur correspondant parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.**

Le pourcentage d'erreur relatif est d'environ $0,074\,\%$, ce qui correspond au choix proposé le plus proche.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> 0,1 %

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS PHOTOGRAPHIE

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRB2, dure deux heures et son coefficient est de 1,5 ou 2 selon la spécialité. Elle comporte deux exercices de 10 points : la modélisation de la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et fonction exponentielle, puis l'étude d'une fonction paire par séries de Fourier. Elle évalue calcul, interprétation, algorithmique et représentation graphique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les racines de l'équation caractéristique déterminent la forme des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène associée.
- Pour une fonction paire, les coefficients de Fourier b_n sont nuls et a_n se calcule sur une demi-période avec le facteur 4/T.
- La pulsation liée à la période T vérifie $\omega = 2\pi/T$; la somme partielle s_n conserve les coefficients jusqu'au rang n.
- Une fonction dérivable dont la dérivée est négative est décroissante ; une limite finie en $+\infty$ peut définir une asymptote horizontale.

Points de vigilance & attentes du jury

- Conserver les unités : f(t) est une distance en centimètres et t est exprimé en secondes.
- Utiliser f(0) et f'(0) pour déterminer les constantes de la solution générale de l'équation différentielle.
- Dans l'algorithme, suivre chaque incrément de 0,1 et tester la condition à chaque étape.
- Pour les séries de Fourier, respecter la période, la parité, les bornes d'intégration et les facteurs indiqués par le formulaire.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer les constantes de la solution de l'équation différentielle ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique pour obtenir la forme générale de la solution. Remplacez ensuite t par 0 dans la solution et sa dérivée, puis utilisez f(0) et f'(0) pour former et résoudre un système de deux équations.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls pour la fonction étudiée ?

La fonction f est paire et sin(nωt) est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Le coefficient b_n, calculé par cette intégrale, vaut alors zéro.

Q : Comment suivre l'algorithme et organiser le temps de l'épreuve ?

Initialisez t à 0, puis ajoutez 0,1 tant que la condition reste vraie. Évaluez f(t) et le test à chaque étape. L'épreuve dure deux heures et les deux exercices sont notés chacun sur 10 points.

Q : Le sujet donne-t-il un barème détaillé par question et quelles calculatrices sont autorisées ?

Le sujet indique 10 points pour chacun des deux exercices, sans préciser la répartition des points question par question. La calculatrice en mode examen actif est autorisée, ainsi qu'une calculatrice sans mémoire de type collège.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsphoto.fr/assets/annales/bts-photographie/E2 - Mathématiques/2023/BTS Photographie - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Photographie : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.